Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 33, núm. 1, 2018. Pàg. 43–55. DOI: 10.2436/20.2002.01.79

Poncelet a la presó de Saratov

Joan Carles Naranjo

> ...j'aurais pu intituler cet ouvrage, purement mathématique, *Mémoires d'outre-tombe*; c'est, en effet, le fruit des méditations d'un jeune lieutenant du génie, laissé pour mort sur le funeste champ de bataille de Krasnoï, non loin de Smolensk,...
>
> **(del prefaci**
> ***d'Applications d'analyse et de géométrie***
> **J.-V. Poncelet)**

Resum: Poncelet va ser un militar francès que va formar part de les tropes napoleòniques que van perdre la batalla de Krasni a la campanya de Rússia. Durant el seu captiveri a la presó de Saratov, basant-se en el record de les lliçons inspiradores de Gaspard Monge a l'École Polytechnique, va reflexionar sobre els fonaments de la geometria projectiva i en va donar un punt de vista original que acabarà tenint una gran influència en el desenvolupament de la geometria al llarg del segle xix. Entre els seus resultats, el més conegut és l'anomenat *porisma de Poncelet*, que estudia l'existència de polígons amb vèrtexs en una cònica C i costats tangents a una altra cònica D en funció de la posició relativa de C i D. En aquest article repassem alguns fets de la vida de Poncelet i donem la idea d'una demostració del porisma.

Paraules clau: geometria projectiva, còniques, porisma de Poncelet.

Classificació MSC2010: 01A55, 14N05, 14N15.

1 Poncelet i la geometria projectiva

Tothom crea a partir del que coneix. Per molt original que sigui la proposta i nou el llenguatge resulta impossible desfer-se de les paraules i dels conceptes

Aquest article es basa en la lliçó inaugural del curs acadèmic 2017–2018 de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, impartida per l'autor.

apresos i que són part del motlle de l'obra nova. Encara més si parlem de matemàtiques. Com ja ens feia notar Newton: és difícil mirar lluny sense posar els peus sobre les espatlles dels que ens precedeixen. Quan Jean-Victor Poncelet, un jove tinent de l'exèrcit napoleònic format a l'École Polytechnique, és fet presoner després de la batalla de Krasni dedica el seu temps a la presó de Saratov a estudiar les propietats de les figures geomètriques. Recordem les seves paraules:

> . . . privé qu'il était de tout livre, de tout instrument de précision, difficiles à se procurer dans cette ville de Saratoff, d'ailleurs dépourvue alors de bibliothèques scientifiques. On ne doit donc pas s'attendre à rencontrer ici comme le reflet ou l'écho lointain des profonds travaux analytiques des Euler, des Bernouilli, des Huygens, des Newton, des d'Alembert, etc., ni même des travaux plus récents et non moins admirables des Lagrange, des Legendre, des Laplace, des Monge et de leurs disciples, travaux qui n'avaient laissé aucune trace dans sa mémoire au milieu des périls et des angoisses d'un aussi malheureux début dans la carrière des armes.

És a dir, que tot i ser un home ben informat dels avenços antics i recents el seu aïllament el desproveeix de les fonts bibliogràfiques sobre les quals pugui basar els seus estudis. En els seus treballs només trobarem, diu ell, *ecos llunyans* d'aquestes obres fonamentals. Les matemàtiques que recorda tenen les arrels en les lliçons inspiradores de Monge. Aquest serà el seu punt de partida a Saratov. El seu motlle mental serà la geometria.

Per comprendre què fa Poncelet a la presó de Saratov i com hi arriba fins allà cal entendre el moment històric en què va viure i quina va ser l'evolució de la geometria en els segles precedents.

Jean-Victor Poncelet (1788–1867).

Poncelet neix un any abans de l'esclat de la Revolució Francesa, esdeveniment que marcarà la vida de tots els matemàtics de la seva generació i de la precedent. Una bona part dels millors matemàtics de l'època es troben a França el 1789 i molts es posicionen políticament, alguns molt activament. Especialment significant és el cas de Gaspard Monge, que s'integra dins del moviment jacobí i ocupa càrrecs de diversa importància durant la dècada dels noranta, i arriba a ser ministre de Napoleó i un dels homes capdavanters en la seva expedició africana (va ser el primer president de l'Institut d'Egipte). Monge participa activament en la creació de l'École Polytecnique i n'esdevé el director. Està considerat l'inventor de la geometria descriptiva i fa aportacions importants al desenvolupament de la geometria diferencial i de la teoria d'equacions en derivades parcials.

D'altra banda, l'estat de la geometria al final del segle XVIII és hereu dels desenvolupants fonamentals de l'inici del segle XVII. A la dècada del 1630, després de la recuperació de la matemàtica grega durant el Renaixement, hi ha dos fets, gairebé paral·lels, que han de tenir una gran influència en el devenir de la geometria i en la seva explosió com a ciència connectada amb l'àlgebra, l'aritmètica, l'anàlisi i la física durant els segles XIX i XX. El primer és la publicació de *La Géometrie* de Descartes, en què s'introdueix el concepte modern de coordenades cartesianes. L'èxit d'aquesta tecnologia novíssima va ser immediat com bé sabem. Amb poca diferència de temps, Desargues publica diversos treballs sobre les propietats projectives de les figures força ignorats en el seu moment. Tan sols Pascal segueix la ruta de Desargues i sembla que durant un segle i mig la consideració de la geometria projectiva com una branca «especialitzada» en problemes concrets (propietats que es mantenen per projecció) es mantindrà. Fins a Poncelet.

Jean-Victor Poncelet no va ser un matemàtic professional sinó un militar. Es va formar a l'École Polytechnique, on va rebre les lliçons de geometria de Monge que tant l'influiran. En acabar els estudis va tornar a Metz, la seva ciutat natal, per treballar en el disseny de les fortificacions de la ciutat. Cridat a files, va formar part de les tropes napoleòniques que anaven a la conquesta de Rússia. Tenia 24 anys quan va caure ferit a la batalla de Krasni la tardor del 1812, una de les més grans desfetes de l'Exèrcit francès en aquella campanya. Va ser empresonat a Saratov i el seu captiveri va durar un any i mig; va necessitar gairebé sis mesos per refer-se de les ferides. Després de la capitulació de Napoleó, la primavera del 1814, tots els presoners de guerra van ser alliberats i Poncelet va tornar a França pel seu propi peu.

Durant l'estada a Saratov va dedicar el seu temps a ensenyar matemàtiques a altres presoners i a fer recerca en geometria. Com en altres casos al llarg de la història (J. Leray o W. Rudin, per exemple), sembla que l'ocupació intel·lectual, docent o de recerca, permet evadir-se de l'empresonament físic. En el cas de Poncelet, l'aïllament el va portar a «repensar» i a redescobrir els fonaments de la geometria que coneixia i recordava. La seva inventiva i originalitat converteixen un exercici d'evasió mental en un gir copernicà en la concepció de la geometria projectiva.

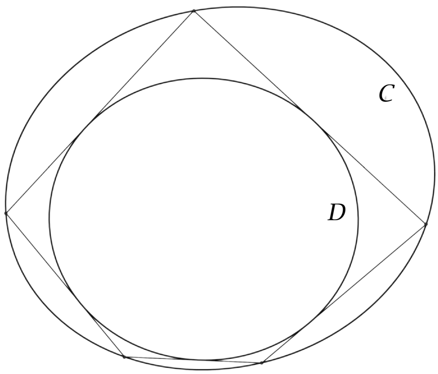
Les seves investigacions, plasmades anys més tard, el 1882, en el *Traité des propriétés projectives des figures* (vegeu [9]), suposen la fonamentació de la geometria projectiva moderna. El principi de dualitat, per exemple, apareix per primera vegada en aquest tractat. Les aportacions posteriors de Möbius, Von Staudt i Plücker connectaran la geometria projectiva amb les tècniques analítiques mitjançant la introducció de les coordenades homogènies, i tot plegat constitueix (amb les aportacions de la teoria de funcions algebraiques d'Abel i de Riemann) el fonament sobre el qual es desenvolupa i creix el que avui coneixem com a *geometria algebraica*.

2 El porisma de Poncelet

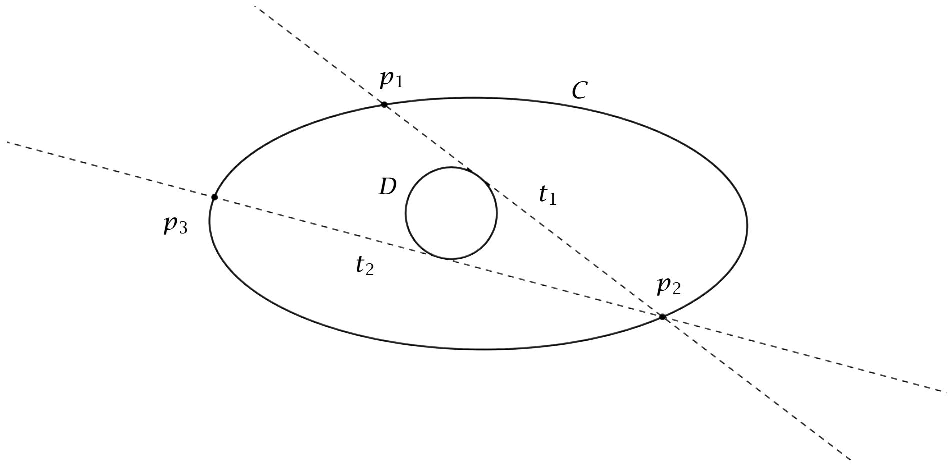
Entre els resultats que Poncelet demostra en el seu tractat, el més recordat és aquesta petita joia:

Porisma de Poncelet. *Siguin C i D dues còniques no degenerades del pla projectiu (complex) sense cap punt de tangència entre elles. Suposem que existeix un polígon de n costats amb vèrtexs a C i costats tangents a D. Aleshores per a tot punt P de C existeix un tal polígon que té P entre els seus vèrtexs.*

Direm que un polígon com el de l'enunciat és un *n-polígon de Poncelet per a* (C, D). Així, si un pentàgon com el del dibuix existeix, aleshores tindrem infinits pentàgons (5-polígons de Poncelet). És més, podrem posar un vèrtex en la posició que ens vingui més de gust.



Una manera de reformular l'enunciat és la següent: considerem un punt p_1 de la cònica C i tracem des d'aquest punt una recta t_1 tangent a D. Diem p_2 l'altre punt de tall de la recta t_1 amb C. Ara dibuixem l'altra tangent a D que passa per p_2 i anomenem p_3 el nou punt de tall amb C, etc.

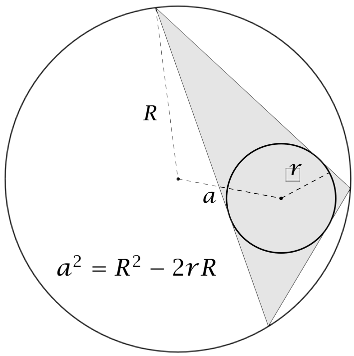


El porisma ens diu que si al cap de n passos tornem al punt inicial, aleshores el mateix passarà si comencem la iteració en qualsevol altre punt. Per tant, l'existència de n-polígons de Poncelet només depèn de la posició relativa de les dues còniques i no pas del punt inicial. Observem que l'afirmació es fa per a un n concret; pot passar (i passa, com es deduirà de la demostració que farem més endavant) que existeixin n-polígons de Poncelet i en canvi no n'hi hagi per a un altre valor m. També és plausible que no n'hi hagi per a cap valor de n. Cal fer notar que els dibuixos que apareixen més amunt són una mica enganyosos: com que estem treballant sobre els complexos i suposem que les còniques no tenen punts comuns amb la mateixa tangent, aleshores en realitat les còniques C i D es tallen transversalment en 4 punts diferents.

El significat de la paraula *porisma* mereix una mica d'atenció. En la matemàtica moderna, almenys des de Steiner, s'entén que és una relació que se satisfà per a un rang infinit de valors però només en presència d'una certa condició. És a dir, un porisma és un problema per al qual o bé hi ha infinites solucions o bé no n'hi ha cap, depenent de si se satisfà una determinada condició. No és la definició que apareix als diccionaris (quan hi apareix), en què curiosament podem llegir accepcions del tipus «conjunt de corol·laris que es dedueixen de la demostració d'un teorema» que semblen allunyades de l'ús real que trobem a la bibliografia matemàtica. La paraula ja es troba en les obres dels matemàtics grecs fins al punt que Euclides va escriure tres llibres sobre porismes que han desaparegut. Pappus (sis-cents anys posterior a Euclides) diu essencialment el següent:

> Els porismes no són formalment ni teoremes ni problemes, sinó que ocupen una posició intermèdia entre tots dos, de manera que els seus enunciats poden ser en forma de teoremes o de problemes. [...] Però és clar a partir de les definicions que els antics geòmetres [*sic*] entenien molt millor la diferència entre les tres classes: en un teorema calia *provar* el que es proposava, en un problema s'havia de *construir* el que es proposava i, finalment, en un porisma s'havia de *trobar* el que es proposava.

Un precedent del resultat de Poncelet és la *fórmula de Chapple*, erròniament atribuïda a Euler durant molt de temps. Respon a una pregunta molt natural: donats dos cercles, un contingut dins l'altre (vegeu el dibuix), en quines condicions existeix un triangle inscrit en un cercle i circumscrit a l'altre? La resposta és la fórmula esmentada, que involucra la distància a entre els dos centres, el radi r del cercle interior i el radi R del cercle exterior: $a^2 = R^2 - 2rR$. Observem que en la relació no hi intervé cap dada sobre el triangle, com per exemple la posició d'un dels vèrtexs. Això és així perquè un cop satisfeta la relació existeixen infinits triangles inscrits i circumscrits alhora. Enunciat d'aquesta manera és clarament un porisma i el de Poncelet n'és una amplíssima generalització.



3 La carta

Abans de donar una demostració del porisma fem una darrera al·lusió històrica a partir d'un article molt recent. A la introducció de [10] es diu:

> During his last trip to Moscow, the second author of this article came into possession of a remarkable mathematical letter. The custodian of the letter, a Russian businessman who wished to remain anonymous, presented the letter to Tabachnikov at the end of his lecture [...] and explained that the letter had been written by his great-great-great grandfather, Konstantin Shestakov, shortly after he had been discharged from the Russian Army during the Napoleonic War.

La primera part de l'article és el contingut d'aquesta carta que va arribar a les mans de Tabachnikov d'una manera tan inusual. El que hi explica Kostantin Shestakov és part de les seves experiències com a militar d'alta graduació destinat a Saratov durant el període en què Poncelet s'hi troba presoner. Ens diu que allà la vida era dura per a tothom degut al fred intens, i que a més a més no hi havia cap altre entreteniment que beure en les tres cantines que hi havia al poble. Reconeix que s'ha lliurat de caure en aquesta rutina alcohòlica perquè ha tingut la sort que li han assignat com a assistent personal un jove tinent francès, Poncelet, enamorat de les matemàtiques, que el fa partícip de les seves recerques. En particular, li explica el seu porisma, que el deixa fascinat. Fins al punt que ell mateix, també aficionat a la geometria, inicia les seves pròpies investigacions.

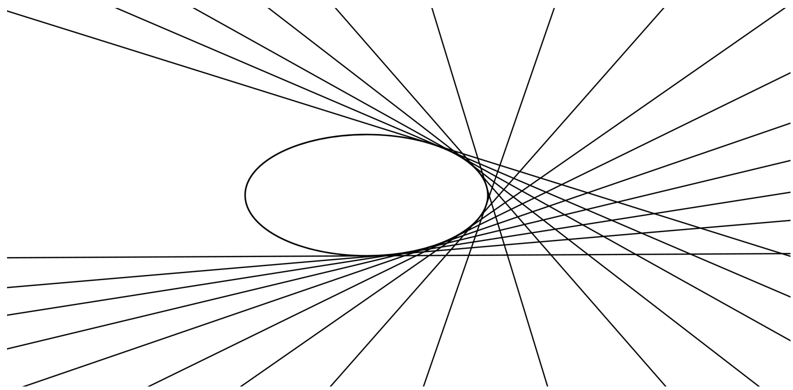
La carta està adreçada al seu germà i suposadament no es va arribar a enviar mai. En realitat, és una petició d'ajuda. Ell havia començat a estudiar, fent càlculs en exemples concrets, com es movien els baricentres (i altres centres de masses) dels n-polígons de Poncelet en moure els vèrtexs. Conjecturava que es mouen sobre una cònica però no va saber donar-ne una demostració i... quan escriu la carta Poncelet ja no hi és. La raó per la qual va pensar en el seu germà era que sabia que havia anat a l'institut amb un estudiant brillant que esdevingué professor universitari a Kazan; es tractava ni més ni menys que de Lobatxevski! El seu prec és que utilitzi aquest contacte per demanar ajuda per trobar una demostració.

Schwartz i Tabachnikov resolen les preguntes que proposa el militar rus i ho publiquen junt amb la història de la carta.

4 Idea d'una demostració del porisma

El que presentem a continuació és una de les moltes demostracions del porisma, probablement una de les més directes, que involucra tan sols alguns fets bàsics de variable complexa i de la teoria de superfícies de Riemann.

Recordem que tota cònica no degenerada té associada una altra cònica, anomenada *cònica dual*, que parametritza l'envolvent de la cònica, o sigui el conjunt de totes les rectes tangents a la cònica. Dit d'una altra manera, fixada la cònica (vista com una equació de segon grau homogènia en tres variables), els coeficients (A, B, C) de les rectes $Ax + By + Cz = 0$ tangents a la cònica també satisfan una equació de segon grau homogènia.



Considerem C i D dues còniques no degenerades i sigui D^* la cònica dual de D. Definim el conjunt següent:

$$S = \{(p, l) \in C \times D^* \mid p \in l\}.$$

Notem que les projeccions en cada factor proporcionen sengles aplicacions definides en S i amb imatge C i D^*, respectivament. Les denotem per

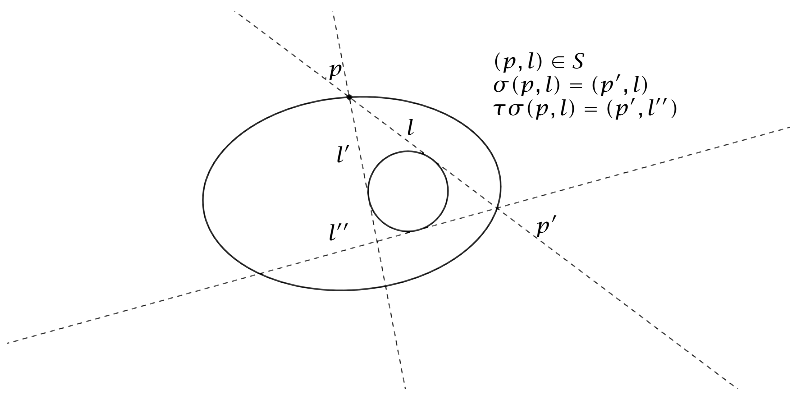
$$\pi_1\colon S \longrightarrow C, \quad \pi_2\colon S \longrightarrow D^*.$$

És ben conegut que les còniques complexes projectives no degenerades són superfícies de Riemann de gènere zero, és a dir, esferes. Les fibres de les aplicacions π_i són fàcils d'entendre: fixat un punt $p \in C$ hi ha exactament dos elements en S, (p, l), (p, l') tals que $\pi_1(p, l) = \pi_1(p, l') = p$, on l, l' són les dues rectes per p que són tangents a D. Diem que π_1 és una aplicació de grau 2. Observem que hi ha exactament 4 punts de C, que també són a D, per als quals $l = l'$. Diem que són punts de ramificació de π_1. Una anàlisi semblant podem fer-la de l'aplicació π_2, també de grau 2 i amb 4 punts de ramificació. Usant les dues aplicacions és fàcil deduir que S és una superfície de Riemann compacta i connexa i, en particular, una superfície topològica connexa, compacta i orientable. Per calcular-ne el gènere usem el resultat següent:

Fórmula de Riemann-Hurwitz (en grau 2). Sigui $f\colon S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació de grau 2 entre superfícies de Riemann de gèneres $g(S_1)$ i $g(S_2)$ amb r punts de ramificació. Aleshores $2g(S_1) - 2 = 2(2g(S_2) - 2) + r$.

En el nostre cas ($f = \pi_1$, $S_1 = S$ i $S_2 = C$) tenim que r és 4 i, com hem dit, el gènere de C és 0. Per tant, $g(S) = 1$, és a dir, S és un tor, o dit d'una altra manera, el producte de dues circumferències. L'estructura de grup de la circumferència $S^1 \subset \mathbb{C}$ induïda pel producte de nombres complexes dota també S d'estructura de grup.

Un fet fonamental per a la demostració és que S està dotada de dues *involucions* σ i τ, és a dir, dues aplicacions holomorfes $\sigma, \tau\colon S \longrightarrow S$ que no són la identitat però satisfan que $\sigma^2 = \tau^2 = \mathrm{Id}_S$. Les definicions són molt simples: σ aplica un element $(p, l) \in S$ a l'element (p', l), on p' és l'altre tall de l i C; τ aplica $(p, l) \in S$ a l'element (p, l') on l' és l'altra tangent a D que passa per p.



La composició de les dues involucions realitza l'acció que hem explicat quan hem dit que el porisma es pot entendre com un procés iteratiu. En particular, la iteració començada en el punt $p \in C$ torna al mateix punt després de n passos (o sigui, existeix un n-polígon de Poncelet per a (C, D) de manera que p sigui un dels seus vèrtexs) si i només si

$$(\tau \circ \sigma)^n(p) = p.$$

Necessitem ara el lema següent que és força conegut i que admetrem sense demostració.

LEMA 4.1. *Una involució en una superfície de Riemann de gènere* 1 *és una translació o bé una translació multiplicada per* -1.

Notem que les translacions no tenen punts fixos, mentre que les nostres involucions en tenen. Per exemple, si $p \in C \cap D$ i prenem com a l la tangent a D en p, el punt (p, l) de S és fix per σ. És a dir, que els punts de ramificació de π_1 són punts fixos de la involució σ. Deixem al lector el petit exercici de trobar punts fixos per τ. En definitiva, σ i τ són de la forma $-\mathrm{Id}_S$ seguides d'una translació i, per tant, $\tau \circ \sigma$ és una translació en S, o sigui $\tau \circ \sigma = t_\alpha$, on:

$$t_\alpha \colon S \longrightarrow S, \quad p \mapsto t_\alpha(p) = p + \alpha.$$

Així la condició $(\tau \circ \sigma)^n(p) = p$ es reescriu com $n\alpha = 0$, que és independent del punt p. Això acaba la demostració del porisma.

Aquesta demostració està desenvolupada amb tot detall, incloses les bases de la teoria de superfícies de Riemann, en el llibre [5]. La idea de la demostració és deguda a P. Griffiths i J. Harris (vegeu [7] i [8]).

Observacions

a) El 1913 Gerbaldi (vegeu [3]) va calcular el nombre de còniques C' del feix generat per C i D per a les quals hi ha n-polígons de Poncelet per a (C', D). Aquest nombre és la meitat del nombre de punts de n-torsió primitius d'una corba el·líptica. Això es dedueix fàcilment de la demostració que hem donat.

b) De la demostració també es desprèn que no és compatible l'existència de n i de m-polígons de Poncelet per a C, D si n i m són primers entre si. També s'obté que si la translació $\tau \circ \sigma$ no és de torsió, no hi haurà n-polígons de Poncelet per a cap n.

c) Cayley va respondre uns trenta anys després del tractat de Poncelet a una pregunta natural que es deriva del porisma: es pot donar una condició explícita per a l'existència d'un n-polígon? La seva resposta és la següent: anomenem M_C i M_D les matrius simètriques associades a les còniques i considerem el polinomi de tercer grau:

$$p(x) := \det(xM_C + M_D).$$

Considerem el desenvolupament de Taylor de la funció $\sqrt{p(x)}$ en $x = 0$:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

Cayley demostra que existeix un n-polígon de Poncelet per a (C, D) si i només si:

$$\begin{vmatrix} A_2 & \dots & A_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & \dots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } n = 2m + 1,\ m \geq 1,$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & \dots & A_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & \dots & A_{2m-1} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } n = 2m,\ m \geq 2.$$

A la cúbica plana $y^2 = p(x)$ se l'anomena *cúbica de Cayley*. Amb una mica de feina es pot provar que la superfície de Riemann S de la demostració és isomorfa a la completació projectiva de la cúbica de Cayley.

5 Altres demostracions i altres porismes

La demostració original de Poncelet té dues parts: la primera és la comprovació amb coordenades en el cas de cercles i la segona és la generalització a còniques qualssevol mitjançant determinades transformacions projectives (projeccions centrals). Pel camí utilitza el controvertit «principi de continuïtat» que té molt protagonisme en el seu tractat. Probablement perquè aquest principi no va ser admès per molts matemàtics de l'època hi va haver intents de demostració alternatius de molts tipus. Un dels més coneguts és el de Jacobi: construeix una funció el·líptica associada al problema per al cas de dos cercles. La demostració del porisma utilitza propietats formals d'aquestes funcions. Nombrosos treballs de l'època intenten estendre les idees de Jacobi al cas general. Altres demostracions i generalitzacions van ser donades per Lebesgue, Halphen, Hurwitz... (vegeu [3]).

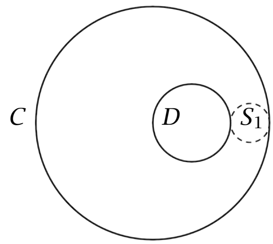
Durant el segle XX l'interès pel porisma no decau, com demostren, per exemple, les fórmules de Gerbaldi. Als anys setanta, dos treballs de Griffiths i Harris atreuen de nou l'atenció sobre el tema. No només donen dues demostracions purament algebraiques (una de les quals hem presentat aquí), sinó que generalitzen el porisma al cas de plans tangents a quàdriques de l'espai. En els anys noranta, Barth i Michel (vegeu [2]) relacionen l'existència de polígons de Poncelet amb propietats de models plans de certes corbes modulars.

A banda del porisma de Griffiths i Harris en trobem molts d'altres a la literatura, alguns de molt clàssics. Un dels més interessants és el de Weyr referent a sistemes de generatrius de dues quàdriques. En l'article [1] es demostra aquest porisma i s'obté el de Poncelet com a corol·lari. Molts porismes clàssics tenen a veure amb les anomenades *sèries circulars* (teorema del zig-zag, porisma d'Emch...); un dels més estètics és el de Steiner, que passem a enunciar amb detall.

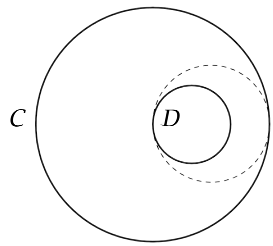
Anomenem *cercle* qualsevol equació de la forma

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

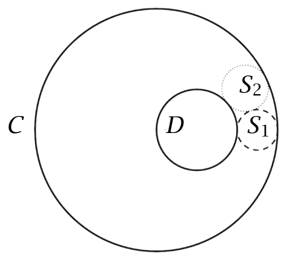
Les coordenades homogènies $(a : b : c : d)$ defineixen l'espai que parametritza aquests cercles, que és un espai projectiu $\mathbb{P}^3$. Fixat un cercle C, el conjunt dels cercles tangents a C és un con $Q_C \subset \mathbb{P}^3$. Donat un altre cercle D, els cons Q_C, Q_D es tallen en dues còniques C_1, C_2. En poques paraules, el conjunt dels cercles tangents a dos cercles donats s'agrupen en dues famílies, cadascuna parametritzada per una cònica. Per exemple, en el dibuix següent prenem un cercle d'una de les famílies (diguem-ne C_1) i l'anomenem S_1:



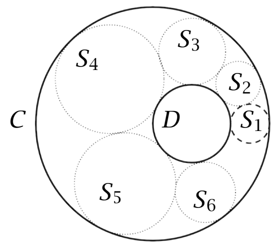
És fàcil visualitzar com són els cercles de l'altra família, la parametritzada per C_2: són cercles tangents a C i a D però que «contenen» D en el seu interior.



Per seguir endavant suposem fixada la família C_1 en tota la construcció. A continuació, triem un altre cercle S_2 en C_1 (automàticament tangent a C i a D) que també sigui tangent a S_1; n'hi ha dos de possibles, dels quals en triem un:



Considerem $S_3 \in C_1$ tangent a S_2. Ara l'elecció és única si demanem no tornar enrere, és a dir, que $S_3 \neq S_1$. Seguint aquest mètode construïm una successió de cercles $S_1, S_2, S_3, S_4 \ldots \in C_1$:



S'obté el resultat següent:

PORISMA DE STEINER. *Si la successió de cercles descrita anteriorment tanca després de n passos, o sigui $S_1 = S_n$, aleshores ho fa sempre, independentment del cercle S_1 inicialment escollit.*

Es pot donar una demostració d'aquest porisma molt semblant a la que hem donat del de Poncelet (vegeu [1]).

6 Comentaris bibliogràfics

Per aprofundir en el context històric i matemàtic de la vida de Poncelet probablement la referència més completa sigui [6]; l'abast del llibre és molt més ampli que aquest període ja que descriu l'evolució de la geometria al llarg de tot el segle XIX. L'article [3], publicat en dues parts, conté una aproximació matemàtica molt exhaustiva al porisma i recull precedents, proves de diversos tipus, generalitzacions i influències en resultats recents; la bibliografia és completíssima. En els articles [7] i [8] hi ha una demostració purament algebraicogeomètrica sense utilitzar mètodes transcendents. També hi apareix una generalització del porisma a l'espai de dimensió 3. Recollint el mateix punt de vista, quasi vint anys després trobem [1], en què es recullen diverses generalitzacions històriques i resultats relacionats. Es presenten i demostren sota un marc unificat.

La iteració que apareix en el porisma de Poncelet està emparentada amb alguns problemes clàssics de sistemes dinàmics, especialment l'anomenat «problema dels billars el·líptics». Un tractament introductori a aquest problema es pot trobar al final del llibre [5]. Per a un estudi més profund el lector es pot adreçar a [4].

Referències

[1] BARTH, W.; BAUER, TH. «Poncelet theorems». *Exposition. Math.*, 14 (2) (1996), 125–144.

[2] Barth, W.; Michel, J. «Modular curves and Poncelet polygons». *Math. Ann.*, 295 (1) (1993), 25–49.

[3] Del Centina, A. «Poncelet's porism: a long story of renewed discoveries, II». *Arch. Hist. Exact Sci.*, 70 (2) (2016), 123–173.

[4] Dragović, V.; Radnović, M. *Poncelet Porisms and Beyond. Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics*. Basilea: Birkhäuser/Springer Basel AG, 2011. (Frontiers in Mathematics)

[5] Flatto, L. *Poncelet's Theorem*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2009.

[6] Gray, J. *Worlds out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century*. 2a ed. Londres: Springer-Verlag London, Ltd., 2011. (Springer Undergraduate Mathematics Series)

[7] Griffiths, P.; Harris, J. «A Poncelet theorem in space». *Comment. Math. Helv.*, 52 (2) (1977), 145–160.

[8] Griffiths, P.; Harris, J. «On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism». *Enseign. Math. (2)*, 24 (1–2) (1978), 31–40.

[9] Poncelet, J. V. *Traité des propriétés projectives des figures*. París: Gauthier-Villars, 1822. [Reeditat en la col·lecció «Les Grands Classiques Gauthier-Villars»]

[10] Schwartz, R.; Tabachnikov, S. «Centers of mass of Poncelet polygons, 200 years after». *Math. Intelligencer*, 38 (2) (2016), 29–34.

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
Spain

jcnaranjo@ub.edu